توسعهٔ یک روش تحلیلی برای بهینه‌سازی طرح اختلاط بتن خودتراکم با مقاومت بالای حاوی خاکستر بادی*

علیرضا حبیبی[۱] حسین احمدوند[۲]

چکیده *بتن خودتراکم از بتن‌های نوین پرکاربرد در دو دهه اخیر می‌باشد. هدف از پژوهش حاضر، ارائه روشی جدید برای ارائه نسبتهای بهینه و مناسب مصالح مصرفی بتن خودتراکم می‌باشد، بطوریکه ضمن حداقل نمودن هزینه ساخت یک مترمکعب بتن، مقاومت فشاری حداکثر نیز حاصل گردد. روش پیشنهادی یک روش تحلیلی می‌باشد. در این روش با استفاده از مفاهیم بهینه‌سازی نظیر تابع لاگرانژین و شرایط کان – تاکر و معرفی رابطه خاصی برای مقاومت فشاری بتن، بدون نیاز به محاسبات رایانه‌ای و براساس یک روش کاملا تحلیلی نسبتهای بهینه‌ای برای طرح اختلاط بتن ارائه می‌گردد. روش پیشنهادی یک روش عمومی می‌باشد و برای انواع بتن کاربرد دارد، ولیکن به منظور معرفی آن، برای بتن خودتراکم با مقاومت بالای حاوی خاکستر بادی مورد استفاده قرار گرفته است. بدین منظور در ابتدا مدل بهینه‌سازی طرح اختلاط بتن که تاثیر نتایج آزمایشگاهی در آن لحاظ گردیده است توسعه داده می‌شود. سپس با استفاده از یک آلگوریتم بهینه‌سازی تحلیلی، طرح اختلاط بهینه بتن با مقاومت مورد نظر بدست می‌آید. نتیجه بهینه‌سازی مشخص نمود که با استفاده از روش پیشنهادی می‌توان نسبتهای بهینه‌ای برای طرح اختلاط بتن‌های خودتراکم با مقاومت بالا ارائه نمود به نحوی که با حداقل مقادیر آب و مواد سیمانی تولید گردیده و هزینه تولید بتن نیز کمترین مقدار را داشته باشد.*

واژه‌های کلیدی طرح اختلاط، بتن خودتراکم، بهینه‌سازی، هزینه، مقاومت فشاری.

Development of an Analytical Method for Optimization of High Strength Self-Compacting Concrete Mix Design Containing Fly Ash

A.R. Habibi H. Ahmadvand

Abstract *self-compacting concrete is one of the most widely used concrete in the past two decades. The objective of present study is to introduce a new method for high strength self-compacting concrete mix design to both achieving maximum compressive strength and minimizing the cost of concrete. The proposed method is an analytical method. In this method, using optimization concepts such as Lagrangian function and Kuhn–Tucker conditions, and introducing a specific relationship to the compressive strength of concrete, without the need for computer computations, and based on a completely analytical method, provides optimal concrete mix design. The proposed method is a general approach and is applicable to all types of concrete. Here, for the purpose of introducing, the method used to high strength self-compacting concrete containing fly ash. An optimization model of the concrete mix design is first developed accounting for effects of experimental results. Then, using an optimization algorithm, optimal concrete mix design is obtained for the concrete with the strength under consideration. Results showed that the proposed method can provide optimal mix design of high-strength self-compacting concrete while water and cement amount are the minimum amounts required for self-compacting concrete.*

Key Words Mix Design, Self- Compacting Concrete, Optimization, Cost, Compressive Strength.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۵/۶ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۱۲/۵ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول: دانشیار، دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه شاهد. Email: ar.habibi@shahed.ac.ir

(۲) دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه کردستان.

مقدمه

بتن به عنوان مصالح ممتاز قرن بیست و یکم میلادی در اکثر سازه‌های عمرانی کاربرد وسیعی دارد. محدودیت-های مختلف و لزوم تامین ویژگی‌های موردنظر، تولید انواع بتن را به ارمغان داشته‌است که یکی از آنها بتن خودتراکم می‌باشد. محققین کشور ژاپن به منظور دستیابی به سازه‌های بتنی پایا و بادوام، نسل جدید بتن را با عنوان بتن خودتراکم (Self-Compacting Concrete) تولید و معرفی نمودند [1]. به منظور تعیین طرح اختلاط بتن خودتراکم، از طرف انجمن‌های معتبر علمی و همچنین محققین مختلف توصیه‌ها و روشهایی ارائه گردیده است. از طرف دیگر مطالعات مختلفی به منظور بهینه نمودن طرح اختلاط بتن خودتراکم صورت گرفته است. در ادامه تحقیقات انجام شده در موضوع طرح اختلاط و همچنین بهینه‌سازی طرح اختلاط بتن خودتراکم بیان گردیده است.

اوکامورا و اوزاوا (Okamura & Ozawa) [1] پیشنهادات مهمی را درباره بتن‌های خودتراکم ارائه نمودند که آن را می‌توان اولین نتایج تحقیقاتی در این زمینه دانست. سو و همکاران (Su et al) [2] روشی را برای طرح اختلاط بتن خودتراکم ارائه نمودند. ایشان ضمن مقایسه روش پیشنهادی با روش انجمن بتن ژاپن دریافتند که روش پیشنهادی ضمن افزایش خواص بتن تازه و سخت شده، سبب مصرف کمتر مواد پودری جایگزین سیمان و همچنین کاهش هزینه‌ها می‌گردد. همچنین محدوده‌های مناسب مصالح مصرفی نیز ارائه گردید. غزال و خیاط (Ghezal & Khayat) [3] بهینه-سازی بتن خودتراکم حاوی سنگ آهک را با استفاده از روش‌های طراحی فاکتوریل آماری (Statistical Factorial Design Methods) انجام دادند. اوکامورا و اوچی (Okamura & Ouchi) [4] نیز مطالعات تکمیلی خود را در مورد بتن خودتراکم ارائه نمودند. کمیته اروپایی (EN) [5] توصیه‌هایی در مورد اجزای طرح اختلاط بتن خودتراکم بیان نموده است. دمونه (Demone) [6] مروری بر تحقیقات صورت گرفته در مورد خواص مکانیکی بتن خودتراکم سخت شده انجام داد. در مقایسه نتایج بیش از ۷۰ تحقیق صورت گرفته در ارتباط با خواص بتن سخت شده، نتایج زیر بدست آمده است. اختلاف مقامت بتن خودتراکم با درشت‌دانه شکسته و رودخانه‌ای در مقایسه با بتن معمولی کمتر است. همچنین نسبت مقاومت فشاری آزمونه‌های استوانه‌ای به مکعبی در مقاومت تا ۳۰ مگاپاسکال، ۰/۸ و در مقاومت ۹۰ مگاپاسکال نزدیک به ۱ می‌باشد. کمیته ۲۳۷ انجمن بتن آمریکا (ACI-237) [7] ضمن ارائه مراحل تعیین اجزای بتن خودتراکم، توصیه‌هایی به منظور کنترل مقادیر نسبت‌های اختلاط بیان نموده-است. مرکز بین‌المللی تحقیقات مصالح سنگی (ICAR) [8] گزارش نهایی تحقیقات خود را در مورد سنگ‌دانه-های مصرفی در بتن خودتراکم ارائه نمود. باتاچاریا و همکاران (Bhattacharya et al) [9] اثرات دانه‌بندی مصالح سنگی و همچنین نوع و میزان مواد معدنی و پودری جایگزین سیمان را بر روی خواص بتن تازه و مقاومت فشاری بتن سخت شده بررسی نموده و به این نتیجه رسیدند که نسبت آب به مواد سیمانی و حجم خمیر نقش مهمی در خواص بتن خودتراکم دارند.

آگاروال و همکاران (Aggarwal et al) [10] روشی را به منظور طراحی اجزای طرح اختلاط بتن خودتراکم مورد بررسی قرار دادند. اوزبای و همکاران (Ozbay et al) [11] تحقیقاتی در مورد نسبت‌های اختلاط بتن خودتراکم با مقاومت بالا با استفاده از روش تاگوچی انجام دادند. ایشان ضمن ساخت نمونه‌های مختلف بتن خودتراکم حاوی خاکستربادی و مواد افزودنی فوق روان کننده و همچنین حباب‌ساز نسبت به تعیین نسبت‌های مناسب اختلاط به منظور دستیابی به ویژگی‌های مختلف بتن تازه و به خصوص خواص مهم بتن سخت شده نظیر مقاومت فشاری ۲۸ روزه، مقاومت کششی و نفوذ پذیری اقدام نمودند. مورالی و کنداسامی (Murali & Kandasamy) [12] با استفاده از روش منحنی‌های هم‌پاسخ، طرح اختلاط بهینه بتن‌های خودتراکم با مقاومت بالا را مورد مطالعه قرار دادند.

همچنین شن و همکاران (Shen et al) [13] تحقیقاتی را در مورد طرح اختلاط بتن خودتراکم انجام دادند. خدر و الجدیری (Kheder & Al Jadiri) [14] روشی را بر پایه تعیین مقاومت فشاری و گام به گام برای تعیین اجزای بتن خودتراکم ارائه نمودند. ترکل و کندمیر (Turkel & Kandemir) [15] تحقیقی در مورد بررسی خواص بتن تازه و سخت شده با مواد افزودنی معدنی و سنگ‌دانه‌های مختلف انجام دادند. اویسال و سامر (Uysal & Sumer) [16] عملکرد بتن خودتراکم حاوی ترکیبات معدنی مختلف جایگزین سیمان نظیر: خاکستر بادی، دوده سیلیسی، سرباره کوره ذوب آهن پودر شده، پودر سنگ آهک و پودر سنگ مرمریت را بررسی نمودند. ایشان با تغییر نسبت‌های مختلف مصالح پودری ذکر شده، اثرات آنها را در بهبود خواص بتن تازه و سخت شده ارزیابی و نتایج را در قالب نسبت‌های مناسب و یا محدوده‌های بهینه بیان نمودند. اویسال و ایلماز (Uysal & Yilmaz) [17] نسبت به بررسی تاثیر ترکیبات معدنی پودری جایگزین سیمان بر روی خواص بتن خودتراکم پرداختند. ایشان تاثیر پودر سنگ آهک، پودر سنگ بازالت و همچنین پودر سنگ مرمر را به عنوان مصالح سیمانی جایگزین سیمان مورد بررسی قرار دادند.

بختیاری و همکاران (Bakhtiyari et al) [18] تحقیقی در مورد طرح اختلاط، مقاومت فشاری و مقاومت حرارتی بتن خودتراکم حاوی پودر سنگ آهک و ریزدانه کوارتزی انجام دادند. ایشان تاثیر مواد فوق را در خواص بتن تازه و سخت شده مورد بررسی قرار دادند. نتیجه این بود که استفاده از مصالح ریزدانه کوارتزی سبب افزایش مقاومت حرارتی بتن در دماهای بالای حدود ۵۰۰ درجه سیلسیوس و همچنین افزایش مقاومت فشاری نمونه‌ها گردید. السراف و همکاران (Al Sarraf et al) [19] روش جدیدی را برای طرح اختلاط بتن با مقاومت بالا مورد بررسی قرار دادند. ایشان از مواد جایگزین سیمان نظیر پودر سیلیس و پودر سنگ آهک به منظور افزایش مقاومت و خواص دیگر بتن خودتراکم استفاده نمودند. در این تحقیق، نشان داده شد که نسبت بهینه آب به موادسیمانی ۰/۲۶ تا ۰/۵۱ می‌باشد. همچنین توصیه گردید که نسبت مناسب سنگ‌دانه ریز به کل سنگ‌دانه برای مقاومت‌های زیاد در محدوده ۰/٤٦ تا ۰/۵۵ می‌باشد. دبی و کومار (Dubey & Kumar) [20] روشی تجربی برای طراحی بهینه طرح اختلاط بتن خودتراکم ارائه نمودند.

با توجه به تحقیقات صورت گرفته در بیست سال اخیر [21] و آئین‌نامه‌های تدوین شده نظیر کمیته اروپایی (EN) [5] و ACI 237-07 [7]، هنوز یک فرآیند طرح اختلاط دقیق برای بتن خودتراکم وجود ندارد. هرچند برخی تحقیقات روشهایی را براساس برخی محدودیتهای مختلف ارائه نموده‌اند ولیکن باتوجه به اینکه تحقیقات با مصالح مختلف و نسبت‌ها و محدودیت های متعدد صورت گرفته است، این پراکندگی سبب شده است تا همانند بتن معمولی، روش مشخص و واحدی برای بتن خودتراکم وجود نداشته باشد.

هدف از تحقیق حاضر ارائه یک روش تحلیلی به منظور تعیین نسبتهای بهینه طرح اختلاط بتن خودتراکم با مقاومت بالای حاوی خاکستر بادی می‌باشد. در این روش، پس از انتخاب نوع مصالح بتن، هزینه‌های مصالح مصرفی بتن براساس قیمتهای روز بازار، مشخص می‌شوند. سپس بدون انجام عملیات محاسباتی با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای و با حداقل اطلاعات علم بهینه‌سازی، براساس مراحل روش تحلیلی، نسبتهای بهینه مصالح مصرفی در بتن خودتراکم تعیین می‌گردند.

مدل بهینه‌سازی طرح اختلاط بتن خودتراکم

هدف از بهینه‌سازی، دستیابی به مقادیر بهینه پارامترهای اصلی طراحی می‌باشد. این پارامترها به متغیرهای طراحی معروفند. اساس کار بهینه‌سازی حداقل نمودن تابع هدف تعریف شده براساس متغیرهای طراحی می-

باشد، به شرطی که محدودیتهای مختلف ناشی از ضوابط طراحی و اجرایی، معروف به قیود طراحی، برآورده شوند.

به منظور بهینه نمودن طرح اختلاط بتن خودتراکم می‌بایست رابطه‌سازی استاندارد بهینه‌سازی انجام گردد. منظور از رابطه‌سازی، بیان مساله به صورت عبارت ریاضی استاندارد بهینه‌سازی براساس تابع هدف و قیود طراحی مطابق رابطه زیر می‌باشد.

$$\min f(x)$$
$$s.t: \quad g_i(x) \le 0 \ , x_i \ge 0 \qquad (۱)$$

بطوریکه $f(x)$ بیانگر تابع هدف، $g_i(x)$ قیود طراحی و x_i نیز متغیرهای طراحی می‌باشند.

متغیرهای طراحی. متغیرهای طراحی، پارامترهای تشکیل دهنده تابع هدف (هزینه) می‌باشند و تغییر در مقادیر آنها تابع هدف را تغییر می‌دهد. در بهینه کردن تابع هدف برخی متغیرهای طراحی تاثیر بیشتری را بر مقدار بهینه تابع هدف دارند.

در این تحقیق متغیرهای طراحی همانند مصالح مصرفی در بتن خودتراکم مرجع [11] می‌باشند. این متغیرها که در جدول (۱) نیز نمایش داده شده‌اند، عبارتند از: وزن آب (x_1)، وزن سیمان (x_2)، وزن خاکستر بادی (Fly Ash) (x_3)، وزن سنگ‌دانه ریز (x_4)، وزن سنگ‌دانه درشت (x_5)، وزن فوق روان کننده (x_6) و وزن افزودنی حباب‌ساز (x_7).

مشخصات مصالح مصرفی عبارت است از: سیمان پرتلند تیپ ۱-۴۲۵ با وزن مخصوص ۳/۱۲ و نرمی (Blaine Fineness) ۳۲۶۰ cm^2/gr، خاکستر بادی با وزن مخصوص ۲/۳۶ و نرمی ۲۸۷۰ cm^2/gr، فوق روان کننده مایع از نوع پلی کربوکسیلیک (Polycarboxylic) و وزن مخصوص ۱/۰۷، ماده حباب‌ساز با وزن مخصوص ۱، درشت‌دانه از نوع شکسته با حداکثر اندازه ۱۹ میلیمتر با وزن مخصوص ۲/۶۸ و درصد جذب آب ۰/۷۵۵ و ماسه رودخانه‌ای با وزن مخصوص ۲/۶۵ و درصد جذب آب ۲/۶۹۵ به عنوان ریزدانه.

بتن خوتراکم بتنی است که بدون جداشدگی دانه-ها، تحت اثر وزنش جاری می‌شود. به منظور دستیابی به ویژگیهای بتن خودتراکم، روشهای زیر توصیه شده است [1]: الف- محدود نمودن مقدار سنگدانه ب- کاهش نسبت آب به مواد سیمانی ج- استفاده از فوق روان کننده. در بتن خودتراکم به منظور افزایش چسبندگی (Viscosity) خمیر، نسبت آب به مواد سیمانی کاهش داده می‌شود. همچنین با استفاده از یک فوق روان کننده، قابلیت شکل‌پذیری و روانی بتن تامین می‌گردد [1]. از این رو فوق روان کننده یک جزء ترکیبی ضروری در بتن خودتراکم می‌باشد [5].

در بتنهای معمولی، جهت افزایش مقاومت بتن در برابر یخ زدن – آب شدن، استفاده از مواد حباب‌ساز توصیه شده است، هرچند که این مواد سبب افزایش کارآیی بتن تازه نیز می‌گردند. یکی از پارامترهای مهم در افزایش مقاومت بتن در برابر عوامل محیطی نظیر: دی اکسید کربن، کلریدها، سولفاتها، آب، اکسیژن و نظایر آن، همچنین چرخه‌های یخ زدن – آب شدن بتن، کاهش نفوذپذیری بتن سخت شده می‌باشد. برخی عوامل موثر بر کاهش نفوذپذیری بتن که توسط ویرایش چهارم مبحث نهم مقررات ملی ساختمان ایران [۲۲] توصیه شده‌اند، عبارتند از: بهینه نمودن عیار سیمان، انتخاب صحیح نسبتهای اختلاط، استفاده از فوق روان کننده، استفاده از ماده حباب‌ساز، کاهش نسبت آب به مواد سیمانی و تامین حداکثر تراکم.

در ادبیات بتن خودتراکم، با توجه به اینکه استفاده از نسبت کم آب به مواد سیمانی، مواد پودری جایگزین سیمان نظیر خاکستر بادی، میکروسیلیس و غیره، و همچنین فوق روان کننده سبب می‌گردد که ضمن کسب روانی مناسب بتن تازه، نفوذپذیری بتن سخت شده نیز کاهش یابد، استفاده از ماده حباب‌ساز مرسوم نمی‌باشد. قابل ذکر اینکه اکثر توصیه‌های مبحث نهم مقررات ملی

ساختمان ایران [۲۲] در تهیه طرح اختلاط بتن خودتراکم انجام می‌گردد.

در تحقیق مرجع [11] در فرآیند بررسیها و انجام آزمایش‌های آزمونه‌های بتن خودتراکم، آزمایش جذب آب و عمق نفوذ آب نیز انجام گردیده است. از این رو به منظور بررسی اثرات ماده حباب‌ساز در بتن خودتراکم از این ماده نیز استفاده گردیده است. در نتایج تحقیق مذکور مشخص گردید که بتنهای تولید شده، جذب آب کمی داشته و عمق نفوذ آب همگی آزمونه‌ها نیز کمتر از ۱۹ میلیمتر، اکثر آزمونه‌ها کمتر از ۱۵ میلیمتر، می‌باشد. همچنین در بررسی به منظور حداقل نمودن جذب آب بتن خودتراکم، مشخص گردید که اولین پارامتر موثر نسبت آب به سیمان و دومین پارامتر موثر نیز مقدار خاکستر بادی می‌باشد و مقدار ماده حباب‌ساز تاثیر کمی، کمتر از یک درصد، داشته است. در نتیجه براساس نتایج تحقیق انجام شده به نظر در تولید بتن خودتراکم نیاز ضروری به ماده حباب‌ساز نمی‌باشد.

تابع هدف (هزینه). بررسی و کنترل طرح‌های اختلاط و تعیین طرح اختلاط بهینه نیازمند یک معیار مناسب می‌باشد. این معیار، تابع هدف می‌باشد. هرچند که معیارهای مختلفی را می‌توان به عنوان تابع هدف در نظر گرفت ولیکن باتوجه به اینکه یکی از معیارهای مهم، کاهش هزینه ساخت بتن می‌باشد، لذا در تحقیق حاضر، تابع هدف، هزینه یک مترمکعب بتن خودتراکم در نظر گرفته شده است. رابطه ریاضی تابع هدف طرح اختلاط بتن خودتراکم به شکل رابطه زیر می‌باشد.

$$\mathrm{Min}\, f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 \qquad (۲)$$

در رابطه (۲)، ضرایب c_1 تا c_7 مقادیر هزینه واحد (هر کیلوگرم) مصالح مصرفی بتن می‌باشند که در شرایط زمانی و مکانی مختلف متغیر هستند. در فرآیند بهینه‌سازی می‌بایست نسبتهای بهینه مصالح مصرفی در طرح اختلاط بتن ضمن ارضاع قیود طراحی، از جمله مقاومت فشاری مورد نظر، هزینه ساخت یک متر مکعب بتن را حداقل نمایند.

قیود طراحی. در مساله بهینه‌سازی محدودیت‌های مختلفی وجود دارند که طرح را تحت تاثیر خود قرار می‌دهند. این محددیت‌ها، قیود طراحی می‌باشند. با توجه به ویژگی‌های بتن خودتراکم نظیر روانی و کارایی بسیار خوب، عدم جداشدگی دانه‌ها، قابلیت عبور از بین میلگردها و مقاومت فشاری مناسب، براساس توصیه‌های مطرح شده در تحقیقات پیشین [5-6, 21]، توصیه‌های ACI237-07 [7]، قیود طراحی و کران‌های بالا و پائین آنها مشخص و مطابق روابطی که در ادامه مشاهده خواهد گردید، رابطه‌سازی شده‌اند. اولین و اصلی‌ترین محدودیت، قید مقاومت فشاری می‌باشد. این قید تضمین می‌کند که طرح اختلاط بهینه محاسبه شده، مقاومت مشخصه لازم را تامین می‌نماید. به منظور تعیین این قید می‌بایست رابطه‌ای بین مقاومت فشاری مورد نظر و متغیرهای طراحی بدست آورد. رابطه ریاضی آن به صورت زیر می‌باشد.

$$g_1:\ -\bar{f}_{cu} \le -f_{cu} \qquad (۳)$$

در رابطه فوق $\bar{f}_{cu}$ مقاومت فشاری پیش‌بینی شده برای بتن خودتراکم با مقاومت بالا براساس نتایج آزمایشگاهی و f_{cu} نیز مقاومت فشاری ۲۸ روزه مورد انتظار می‌باشد. براساس پیشنهادات اوکامورا و اوزاوا [1]، کمیته اروپایی (EN) [5] و ACI237R-07 [7]، مقدار مصالح سیمانی شامل سیمان و مواد پودری نظیر خاکسر بادی، دوده سیلیسی، پودر سنگ آهک و غیره می‌بایست در محدوده مناسبی باشد. این محدوددیت توسط قیود زیر کنترل می‌گردد.

$$g_2:\quad x_2 + x_3 - L_2^u \le 0 \qquad (٤)$$

$$g_3:\quad -x_2 - x_3 + L_3^l \le 0 \qquad (٥)$$

ثابت‌های L_2^u و L_3^l به ترتیب مقادیر حداکثر و حداقل مصالح سیمانی مصرفی در بتن خودتراکم می‌باشند. قید نسبت وزنی آب به مواد سیمانی یکی دیگر از محدودیت‌های طراحی می‌باشد. این قید یکی از قیود مهم طراحی به منظور تامین خواص بتن خودتراکم تازه و سخت شده می‌باشد. براساس تحقیقات مراجع [11, 14, 21] و ACI237R-07 [7]، محدوده‌های مختلفی برای نسبت وزنی آب به مواد سیمانی مطرح گردیده است. در تحقیق حاضر قید نسبت وزنی آب به مواد سیمانی به شکل روابط زیر بیان می‌گردد.

$$g_4:\ \frac{x_1}{x_2+x_3} - L_4^u \le 0 \qquad (٦)$$

$$g_5:\ -\frac{x_1}{x_2+x_3} + L_5^l \le 0 \qquad (٧)$$

بطوریکه ثابت‌های L_4^u و L_5^l به ترتیب مقادیر حداکثر و حداقل نسبت وزنی آب به مصالح سیمانی بتن خودتراکم می‌باشد. قید دیگر، محدوده مناسب آب مصرفی می‌باشد که براساس پیشنهاد EFNARC-01 [23] به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$g_6:\ x_1 \le L_6^u \qquad (٨)$$

$$g_7:\ -x_1 \le L_7^l \qquad (٩)$$

ثابت‌های L_6^u و L_7^l به ترتیب مقادیر حداکثر و حداقل آب مصرفی در بتن خودتراکم می‌باشند. محدودیت نسبت وزنی سنگ‌دانه ریز به کل سنگ‌دانه نیز یکی دیگر از قیود طراحی می‌باشد. باتوجه به پیشنهادهای کمیته اروپایی (EN) [5] و همچنین محدودیتهای توصیه شده برای بتن خودتراکم با مقاومت بالا [11]، قید نسبت وزنی سنگ‌دانه ریز به کل سنگ‌دانه عبارت است از:

$$g_8:\ \frac{x_4}{x_4+x_5} - L_8^u \le 0 \qquad (١٠)$$

$$g_9:\ -\frac{x_4}{x_4+x_5} + L_9^l \le 0 \qquad (١١)$$

ثابت‌های L_8^u و L_9^l به ترتیب مقادیر حداکثر و حداقل نسبت وزنی سنگ‌دانه ریز به کل سنگ‌دانه در بتن خودتراکم می‌باشند. یکی دیگر از مهم‌ترین محدودیت‌ها، محدودیت مربوط به نسبت حجمی آب به مصالح سیمانی می‌باشد. همانطور که در ادامه مشاهده خواهد شد، این قید می‌تواند نقش موثری در تعیین طرح اختلاط بهینه بتن خودتراکم داشته باشد. باتوجه به مقادیر توصیه شده نسبت حجمی آب به مصالح سیمانی در بتن خودتراکم [1, 4, 19, 24]، قید مذکور به شکل روابط زیر بیان می‌گردد.

$$g_{10}:\ \frac{G_C G_{FA} x_1}{G_{FA}x_2+G_C x_3} - L_{10}^u \le 0 \qquad (١٢)$$

$$g_{11}:\ -\frac{G_C G_{FA} x_1}{G_{FA}x_2+G_C x_3} + L_{11}^l \le 0 \qquad (١٣)$$

ثابت‌های L_{10}^u و L_{11}^l به ترتیب مقادیر حداکثر و حداقل نسبت حجمی آب به مصالح سیمانی بتن خودتراکم می‌باشند. محدودیت دیگر، نسبت حجم خمیر از حجم کل (یک مترمکعب) می‌باشد. این محدودیت براساس تحقیق انجام شده [5]، مطابق روابط زیر بیان می‌گردد.

$$G_{12}:\ \frac{1}{\gamma_W}\left(\frac{x_1}{G_W}+\frac{x_2}{G_C}+\frac{x_3}{G_{FA}}+\frac{x_6}{G_{SP}}+\frac{x_7}{G_{AE}}\right) - L_{12}^u \le 0 \qquad (١٤)$$

$$g_{13}:\ -\frac{1}{\gamma_W}\left(\frac{x_1}{G_W}+\frac{x_2}{G_C}+\frac{x_3}{G_{FA}}+\frac{x_6}{G_{SP}}+\frac{x_7}{G_{AE}}\right) + L_{13}^l \le 0 \qquad (١٥)$$

ثابت‌های L_{12}^u و L_{13}^l مقادیر حداکثر و حداقل نسبت حجمی خمیر از حجم کل بتن خودتراکم می‌باشند. آخرین قید نیز قید حجم کل بتن می‌باشد که به شکل رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$g_{14}: \frac{1}{\gamma_W}\left(\frac{x_1}{G_W}+\frac{x_2}{G_C}+\frac{x_3}{G_{FA}}+\frac{x_4}{G_S}+\frac{x_5}{G_G}+\frac{x_6}{G_{SP}}+\frac{x_7}{G_{AE}}\right)-1 \le 0 \quad (۱۶)$$

در روابط (۱۲) تا (۱۶)، G_W وزن مخصوص آب، G_C وزن مخصوص سیمان، G_{FA} وزن مخصوص خاکستر بادی، G_S وزن مخصوص سنگ‌دانه ریز، G_G وزن مخصوص سنگ‌دانه درشت، G_{SP} وزن مخصوص فوق روان کننده، G_{AE} وزن مخصوص افزودنی حباب‌ساز و γ_W نیز وزن حجمی آب می‌باشد. کلیه قیود طراحی بجز قید اول، روابط کاملا واضحی از متغیرهای طراحی می‌باشند. به منظور ارائه یک آلگوریتم بهینه‌سازی کارا برای طرح اختلاط بتن خودتراکم، می‌بایستی قید اول که مربوط به مقاومت فشاری بتن می‌باشد، به صورت رابطه‌ای صریح و واضح از متغیرهای طراحی بیان گردد.

تعیین رابطه قید مقاومت فشاری. در تحقیق حاضر، به منظور بهینه‌سازی طرح اختلاط بتن خودتراکم براساس روش تحلیلی پیشنهادی، براساس ایده‌ای جدید توسط مولفین، مقاومت فشاری بتن به شکل رابطه زیر معرفی می‌گردد.

$$\bar{f}_{cu} = k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} x_5^{\alpha_5} x_6^{\alpha_6} x_7^{\alpha_7} \quad (۱۷)$$

بطوریکه k و α_1 تا α_7 ضرایب مجهولی می‌باشند که از پردازش نتایج آزمایشگاهی تعیین می‌شوند. x_1 تا x_7 نیز متغیرهای طراحی مساله می‌باشند. به این منظور از نتایج چندین نمونه آزمایشگاهی، ذکر شده در جدول (۱)، استفاده شده است [11]. در تعیین رابطه مقاومت فشاری به منظور دستیابی به نتایج مطلوب و دقیق می‌بایست از پراکندگی در نتایج آزمایشگاهی مرجع اجتناب نمود و از یک محدوده مقاومتی مناسب استفاده نمود. با حداقل نمودن خطای رابطه (۱۷) با استفاده از روش مجموع مجذور مربعات و محاسبه بهترین مقادیر برای ضرایب مجهول، رابطه (۱۸) حاصل می‌گردد.

$$\bar{f}_{cu} = 2.15924 \times 10^{-3} \times x_1^{-0.771} x_2^{0.65} x_3^{0.217} x_4^{0.56} x_5^{0.832} x_6^{-0.012} x_7^{-0.004} \quad (۱۸)$$

ضریب همبستگی رابطه اخیر برابر ۰/۷۶۵ می‌باشد. مقادیر خطای حاصل از رابطه فوق در تعیین مقاومت فشاری طرح‌های اختلاط آزمایشگاهی مختلف در جدول (۱) خلاصه شده است. مقدار خطا برابر است با اختلاف مقاومت فشاری آزمایشگاهی و مقاومت فشاری حاصل از رابطه شماره (۱۸). همچنین درصد خطا نسبت مقدار خطا به مقاومت فشاری آزمایشگاهی می‌باشد. همانگونه که مشاهده می‌گردد، حداکثر خطا مربوط به طرح اختلاط شماره ۳ و مقدار خطا نیز ۷ درصد می‌باشد. به منظور جلوگیری از افزایش خطای رابطه مقاومت فشاری، با توجه به نتایج آزمایشگاهی مرجع، این خطا، حداکثر خطای قابل قبول در نظر گرفته شده است. در آزمونه‌های استفاده شده، ۸۲ درصد، خطایی کمتر از ۵ درصد دارند و تنها سه آزمونه خطایی بین ۵ تا ۷ درصد دارند. لذا رابطه شماره (۱۸) می‌تواند با دقت مناسبی به منظور تعیین مقاومت فشاری طرح اختلاط این نوع بتن استفاده گردد.

حل مسئله بهینه‌سازی طرح اختلاط

در تحقیق حاضر، از یک ایده تحلیلی به منظور حل مساله بهینه‌سازی طرح اختلاط بتن خودتراکم با مقاومت بالا براساس مفاهیم ریاضی بهینه‌سازی شامل تابع لاگرانزین و شرایط کان-تاکر (KT) استفاده می‌گردد. مزیت روش پیشنهادی این است که بهینه‌سازی طرح اختلاط بدون انجام محاسبات حجیم با الگوریتم‌های بهینه‌سازی و بدون نیاز به نرم‌افزارهای محاسباتی، انجام می‌شود. در این روش، با معرفی تابع مقاومت فشاری بصورت رابطه (۱۷) و تشکیل تابع لاگرانژین با در نظر گرفتن محدودیت مقاومت فشاری به عنوان قید

اصلی و محدودیت‌های دیگر به عنوان قیود فرعی، با برقراری شرایط کان – تاکر جواب بهینه تعیین می‌گردد. در این روش قید مقاومت فشاری و قیود موثر، فعال فرض می‌گردند.

فرآیند محاسبات و انجام بهینه‌سازی مطابق روش پیشهادی که در شکل (۱) نیز نشان داده شده است، به شرح ذیل خلاصه می‌گردد:

۱. مشخص نمودن متغیرهای طراحی (مصالح مصرفی بتن)، ضرایب هزینه و رابطه‌سازی تابع هدف.
۲. تعیین رابطه مقاومت فشاری مطابق رابطه شماره (۱۷) بر حسب متغیرهای طراحی .
۳. انتخاب قیود مهم و فعال مانند قید مقاومت فشاری که نقش اساسی در فرآیند بهینه‌سازی دارند.
٤. تشکیل تابع لاگرانژین برای تابع هدف و قیود طراحی.
٥. اعمال شرایط کان - تاکر براساس تابع لاگرانژین
٦. حل معادلات کان – تاکر و تعیین طرح اختلاط نامزد بهینگی
۷. کنترل کلیه قیود مساله. در صورت برآورده شدن قیود، عملیات متوقف می‌گردد و در صورت نقض یک یا چند قید، قیود فعال اصلاح شده و مراحل از گام چهارم تکرار می‌شود.
۸. تعیین طرح بهینه.

جدول ۱ مقادیر طرح اختلاط آزمایشگاهی مرجع [11] و خطای رابطه برازش شده

نمونه	آب kg/m^3	سیمان kg/m^3	خاکستر بادی kg/m^3	سنگ‌دانه ریز kg/m^3	سنگ‌دانه درشت kg/m^3	فوق روان کننده kg/m^3	عامل حباب-ساز kg/m^3	مقاومت فشاری آزمایشگاهی MPa	مقاومت فشاری طبق رابطه (۱۸) MPa	خطا	درصد خطا
۱	۱٦۰	٤٦۳/۷۷	٦۹/٥٦	٦۷۰/٦٥	۱۰٤۹	۸	۰/۰٦	٦۷/۸	۷۲/۱۱	-٤/۳۱	٦/۳٥
۲	۱٦٥	٤۲۳/۱	۱۲٦/۹	۷۱۹/۳٦	۹٥۳/٥۷	۱۰	۰/۰۷	۷۰/۸	۷۲/۳۷	-۱/٥۷	۲/۲۲
۳	۱۷۰	۳۹۰/۸۱	۱۷٥/۸٦	۷۷۳/۸۸	۸۳۸/۳۷	۱۲	۰/۰۸	٦۲/۹	٦۷/۳	-٤/٤	٦/۹۹٥
٤	۱۷۰	٤٤۸	٦۷/۱٥	۸۱٥	۸۸۲/۷۹	۱۰	۰/۰٦	٦۲/۱	٦٤/۳٤	-۲/۲٤	۳/٦
٥	۱٦۰	۳۷٦	٥٦/٤۳	۷۸٤/۱	۱۰۳۹/۳۹	۱۰	۰/۰۸	٦٤/٥	٦٤/۸۷	-۰/۳۷	۰/٥۷
٦	۱٦٥	۳٤۳	۱۰۲/۹٥	۸٥۳	۹۲٤	۱۲	۰/۰٦	٦۳/۸	٦٤/٥٦	-۰/۷٦	۱/۱۹
۷	۱۷۰	۳۱٦/۸٦	۱٤۲/٦	٦۷٥/٦٦	۱۰٥٦/۸۱	۸	۰/۰۷	٦۳/۹	٦۳/۳۹	۰/٥۱	۰/۷۹۸
۸	۱٦۰	۳٦۷/۸۱	۱٦٥/٥۲	۸۰۹/٦	۸۷۷	۱۰	۰/۰۷	۷٤/٦	۷۱/٤۳	۳/۱۷	٤/۲٥
۹	۱٦٥	٤۷۸/۲٦	۷۱/۷٤	٦٦٤/٥۳	۱۰۳۹/۳۹	۱۲	۰/۰۸	۷۱/٦	۷۰/۹۷	۰/٦۳	۰/۸۸
۱۰	۱۷۰	٤۳٥/۹	۱۳۰/۷۷	۷۰۱/۸۸	۹۳۰/۳۹	۸	۰/۰٦	۷۲/٤	۷۰/۳۷	۲/۰۳	۲/۸
۱۱	۱٦۰	۳۳٤/۳۸	۱٥۰/٤۷	۷٤۳/۱	۹۸٥	۱۲	۰/۰٦	۷۲/۳	٦۸/۹٤	۳/۳٦	٤/٦٤۷
۱۲	۱٦٥	٤۳٤/۷۸	٦٥/۲۲	۸۳۹	۹۰۸/۹۳	۸	۰/۰۷	۷۱/۲	٦٦/۹٦	٤/۲٤	٥/۹٥٥
۱۳	۱۷۰	۳۹٦/۲۷	۱۱۸/۸۸	٦٦۲/٥۲	۱۰۳٦/۲٥	۱۰	۰/۰۸	۷۰/۲	٦۸/۳٥	۱/۸٥	۲/٦۳
۱٤	۱٦۰	۳۳۲/٦٤	۹۹/۷۹	۸۷۸/٦٤	۹٥۱/۸٥	۸	۰/۰۸	٦٤/۸	٦۷/۳٤	-۲/٥٤	۳/۹۲
۱٥	۱٦٥	۳۰۷/٥٥	۱۳۸/٤	۷۰۸/۲٤	۱۱۰۷/۷٥	۱۰	۰/۰٦	٦٤/۹	٦۷/۳٥	-۲/٤٥	۳/۷۷٥
۱٦	۱۷۰	۳۹۹/٥۳	٥۹/۹۳	۷٦۲/۲	۱۰۱۰/۲۷	۱۲	۰/۰۷	٦٤/۱	٦۲/٦۲	۱/٤۸	۲/۳۰۹



شکل ۱ آلگوریتم روش پیشنهادی

در بررسی تحقیقات مختلف انجام گرفته در بتن خودتراکم [1, 2, 4, 9, 11, 14, 19, 21]، بخصوص بهینه نمودن طرح اختلاط با هدف دستیابی به حداکثر مقاومت فشاری، مشخص گردید که موثرترین قیود به منظور دستیابی به طرح اختلاط بهینه بتن خودتراکم با مقاومت بالا، قیود مقاومت فشاری و نسبت حجمی آب به مصالح سیمانی می‌باشند. از این رو به منظور اجرای فرآیند طرح بهینه نسبتهای مصالح مصرفی بتن مطابق روش پیشنهادی، قیود مقاومت فشاری و نسبت حجمی آب به مصالح سیمانی فعال فرض می‌شوند. در ادامه مشاهده خواهد شد که فعال بودن این قیود سبب دستیابی به حداقل مقدار تابع هدف و به عبارتی تعیین طرح اختلاط بهینه می‌گردد. زیرا حد بالای نسبت حجمی آب به مصالح سیمانی، کمترین مقادیر سیمان و پوزولان را که بهینه هستند، نتیجه می‌دهد و فعال شدن قید مقاومت فشاری موجب حصول حداقل مقدار ممکن برای سنگ‌دانه ریز و سنگ‌دانه درشت به منظور تامین مقاومت فشاری مورد نیاز خواهد شد. معادله مقاومت فشاری بدست آمده مطابق رابطه (۱۸) نشان می‌دهد که ضرایب متغیرهای طراحی شماره یک (وزن

آب)، شش (وزن فوق روان کننده) و هفت (وزن افزودنی حباب‌ساز) منفی می‌باشند. باتوجه به محدوده کم تغییرات متغیرهای مذکور در طرح‌های اختلاط مرجع [11] و همچنین به دلیل اینکه مقدار تابع هدف می‌بایست حداقل گردد به شرطی که حداکثر مقاومت فشاری نیز تامین شود، بنابراین حد پائین متغیرهای مذکور به عنوان مقادیر بهینه انتخاب می‌گردد. این موضوع با مقایسه مقادیر جملات متغیرهای طراحی مذکور در تابع هدف و رابطه مقاومت فشاری (۱۸) قابل بررسی می‌باشد. این بررسی در جدول (۲) قابل مشاهده می‌باشد.

مقادیر انتخاب شده به عنوان حالت بهینه متغیرهای طراحی x_1، x_6 و x_7 کمترین مقدار را در تابع هدف و بطور همزمان بیشترین مقدار را در مقاومت فشاری دارند. از این رو مقادیر بهینه مقدار آب، فوق روان کننده و افزودنی حباب‌ساز به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$x_{1_{opt}} = 160 \text{ ،} x_{6_{opt}} = 8 \text{ و } x_{7_{opt}} = 0.06 \quad (۱۹)$$

جدول ۲ مقادیر بهینه متغیرهای طراحی x_1، x_6 و x_7

متغیر طراحی	محدوده تغییرات	مقدار جمله مرتبط در: رابطه مقاومت فشاری	مقدار جمله مرتبط در: تابع هدف
x_1	۱۶۰	۰/۰۱۹۹۸	۱۶۰۰
	۱۶۵	۰/۰۱۹۵	۱۶۵۰
	۱۷۰	۰/۰۱۹۱	۱۷۰۰
x_6	۸	۰/۹۷۵	۳۲۰۰۰۰
	۱۰	۰/۹۷۳	۴۰۰۰۰۰
	۱۲	۰/۹۷۱	۴۸۰۰۰۰
x_7	۰/۰۶	۱/۰۱۱۳	۱۸۰۰
	۰/۰۷	۱/۰۱۰۶	۲۱۰۰
	۰/۰۸	۱/۰۱۰۱	۲۴۰۰

باتوجه به اینکه مطابق رابطه (۱۹) مقادیر بهینه x_1, x_6, x_7 معلوم گردیدند لذا می‌توان تابع هدف را به صورت زیر بیان نمود.

$$f(x) = c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_0 \quad (۲۰)$$

بطوریکه c_0 برابر است با:

$$c_0 = c_1x_{1_{opt}} + c_6x_{6_{opt}} + c_7x_{7_{opt}} \quad (۲۱)$$

باتوجه به تابع هدف، رابطه (۲۰) و قید مقاومت فشاری، رابطه (۳) و قید نسبت حجمی آب به مصالح سیمانی، رابطه (۱۲)، تابع لاگرانژین به صورت زیر بدست می‌آید [25].

$$L(x, u_1, u_2) = c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_0 + u_1(f_{cu} - k'{x_2}^{\alpha_2}{x_3}^{\alpha_3}{x_4}^{\alpha_4}{x_5}^{\alpha_5}) + u_2(\frac{G_CG_{FA}x_1}{G_{FA}x_2+G_Cx_3} - L_{10}^u) \quad (۲۲)$$

k' نیز طبق رابطه زیر بدست می‌آید.

$$k' = k\,{x_{1_{opt}}}^{\alpha_1}{x_{6_{opt}}}^{\alpha_6}{x_{7_{opt}}}^{\alpha_7} \quad (۲۳)$$

معادلات زیر را با استفاده از شرایط کان – تاکر می‌توان برای مساله طرح اختلاط بهینه بتن خودتراکم با مقاومت بالا نوشت.

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = c_2 - \frac{\alpha_2 f_{cu}u_1}{x_2} - G_{FA}u_2 = 0 \quad (۲۴)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = c_3 - \frac{\alpha_3 f_{cu}u_1}{x_3} - G_Cu_2 = 0 \quad (۲۵)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = c_4 - \frac{\alpha_4 f_{cu}u_1}{x_4} = 0 \quad (۲۶)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_5} = c_5 - \frac{\alpha_5 f_{cu}u_1}{x_5} = 0 \quad (۲۷)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = f_{cu} - k'{x_2}^{\alpha_2}{x_3}^{\alpha_3}{x_4}^{\alpha_4}{x_5}^{\alpha_5} = 0 \quad (۲۸)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = \frac{G_CG_{FA}x_1}{G_{FA}x_2+G_Cx_3} - L_{10}^u = 0 \quad (۲۹)$$

از حل دستگاه معادلات روابط (۲۴) و (۲۵) رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$(c_2G_C - c_3G_{FA}) + f_{cu}u_1(\frac{\alpha_3G_{FA}}{x_3} - \frac{\alpha_2G_C}{x_2}) = 0 \quad (۳۰)$$

بدلیل اینکه $c_2 > c_3$، همچنین $G_C > G_{FA}$ می‌باشد و می‌بایست $u_1 \geq 0$ گردد، بنابراین مقدار پرانتز سمت راست رابطه (۳۰) باید نامثبت باشد. از این رو از برقرای رابطه مورد نظر، رابطه جدید زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\alpha_3 G_{FA}}{x_3} - \frac{\alpha_2 G_C}{x_2} \leq 0 \quad (۳۱)$$

رابطه (۳۱) را می‌توان به صورت رابطه زیر نیز نوشت.

$$\frac{x_3}{x_2} \geq \frac{\alpha_3 G_{FA}}{\alpha_2\, G_C} \quad (۳۲)$$

با استفاده از رابطه (۳۱) و همچنین (۲۹) روابط زیر برای متغیرهای بدست می‌آیند.

$$x_3 \geq \frac{\alpha_3}{\alpha_3+\alpha_2} G_{FA} x_{1_{opt}} L_{10}^{u} \quad (۳۳)$$

$$x_2 \geq \frac{\alpha_2}{\alpha_3+\alpha_2} G_C x_{1_{opt}} L_{10}^{u} \quad (۳٤)$$

باتوجه به اینکه هدف از مساله بهینه‌سازی حداقل نمودن مقدار تابع هدف، هزینه ساخت یک مترمکعب بتن خودتراکم، می‌باشد لذا حد پائین روابط (۳۳) و (۳٤) به عنوان مقادیر بهینه متغیرهای x_2 و x_3 می‌باشد. این مقادیر سبب برقراری رابطه (۲۹) شده و مقادیر بیشتر سبب عدم برقراری رابطه فوق می‌گردد. اکنون به منظور دستیابی به مقاومت مورد انتظار f_{cu} می‌بایست قید فعال مقاومت فشاری یعنی رابطه (۲۸) نیز ارضاع گردد. با جایگذاری مقادیر x_2 و x_3 و همچنین مقادیر x_4 و x_5 حاصل از روابط (۲٦) و (۲۷) در رابطه (۲۸)، مقدار u_1 مطابق رابطه زیر تعیین می‌گردد.

$$u_1 = \left(\frac{{f_{cu}}^{1-(\alpha_4+\alpha_5)}}{k''\left(\frac{\alpha_4}{c_4}\right)^{\alpha_4}\left(\frac{\alpha_5}{c_5}\right)^{\alpha_5}}\right)^{\frac{1}{\alpha_4+\alpha_5}} \quad (۳۵)$$

مقدار k'' نیز از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$k'' = k' {x_2}^{\alpha_2} {x_3}^{\alpha_3} \quad (۳٦)$$

سپس با استفاده از رابطه (۳۵) و همچنین روابط (۲٦) و (۲۷)، متغیرهای طراحی x_4 و x_5 مطابق روابط زیر محاسبه می‌گردند.

$$x_4 = \frac{\alpha_4}{c_4} f_{cu} u_1 \quad (۳۷)$$

$$x_5 = \frac{\alpha_5}{c_5} f_{cu} u_1 \quad (۳۸)$$

مطالعه موردی

به منظور نشان دادن کارآیی روش پیشنهادی و صحت‌سنجی نتایج، سه مثال عددی برای یافتن طرح اختلاط بهینه بتن خودتراکم با مقاومت‌های مشخصه ٦۰، ٦۵ و ۷۰ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. مطابق روابط بدست آمده در بخش قبل، ضروریست شرایط مساله، وزن مخصوص مصالح و ضرایب هزینه واحد متغیرهای طراحی مشخص گردند. براساس قیمت روز مصالح مصرفی، قیمت واحد هر کیلوگرم برای آب ۱۰، سیمان ۱۲۵۰، خاکستر بادی ۱۱۰۰، سنگ‌دانه ریز ۵۷، سنگ‌دانه درشت ۵٦، فوق روان کننده ٤۰۰۰۰ و افزودنی حباب‌ساز نیز ۳۰۰۰۰ در نظر گرفته شده است. همچنین وزن مخصوص آب برابر ۱، سیمان مصرفی برابر ۳/۱۲، خاکستر بادی برابر ۲/۳٦، سنگ‌دانه ریز برابر ۲/٦۵، سنگ‌دانه درشت برابر ۲/٦۸، فوق روان کننده ۱/۰۷ و افزودنی حباب‌ساز نیز ۱ می‌باشد [11]. وزن حجمی آب نیز برابر ۱۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب است.

با استفاده از فرمول‌بندی استاندارد بهینه‌سازی طرح اختلاط بتن، مطابق روابط و فرآیند ذکر شده در بخش قبل، سه مسئله طرح اختلاط با روش پیشنهادی حل می‌گردد. به عنوان نمونه، مسئله اول که مربوط به مقاومت مشخصه ٦۰ مگاپاسکال می‌باشد، باتوجه به شرایط حاکم بر نتایج آزمایشگاهی مرجع [11]، به صورت زیر رابطه‌سازی می‌گردد.

$$\text{Min } f(x) = 1250\,x_2 + 1100\,x_3 + 57\,x_4 + 56\,x_5 + 323400$$

$$\text{S.t:}\quad g_1:\ -\bar{f}_{cu} \leq -60$$

$$g_2:\quad x_2 + x_3 - 650 \leq 0$$
$$g_3:\quad -x_2 - x_3 + 380 \leq 0$$

$$g_4:\ \frac{x_1}{x_2+x_3} - 0.38 \leq 0$$

$$g_5: -\frac{x_1}{x_2+x_3} + 0.3 \le 0$$

$$g_6: x_1 \le 120$$

$$g_7: -x_1 \le 150$$

$$g_8: \frac{x_4}{x_4+x_5} - 0.48 \le 0$$

$$g_9: -\frac{x_4}{x_4+x_5} + 0.39 \le 0$$

$$g_{10}: \frac{7.3632x_1}{2.36x_2+3.12x_3} - 1.0 \le 0$$

$$g_{11}: -\frac{7.3632x_1}{2.36x_2+3.12x_3} + 0.9 \le 0$$

$$g_{12}: \frac{1}{1000}\left(x_1 + \frac{x_2}{3.12} + \frac{x_3}{2.36} + \frac{x_6}{1.07} + x_7\right) -0.38 \le 0$$

$$g_{13}: -\frac{1}{1000}\left(x_1 + \frac{x_2}{3.12} + \frac{x_3}{2.36} + \frac{x_6}{1.07} + x_7\right) +0.3 \le 0$$

$$g_{14}: \frac{1}{1000}\left(x_1 + \frac{x_2}{3.12} + \frac{x_3}{2.36} + \frac{x_4}{2.65} + \frac{x_5}{2.68} + \frac{x_6}{1.07} + x_7\right) - 1 \le 0$$

فرضیات و مقادیر ضرایب و قیود طراحی مسئله دوم و سوم به جز قید مقاومت فشاری با مسئله اول یکسان می‌باشند. قید مقاومت فشاری در مسئله دوم و سوم به ترتیب، $g_1: -\bar{f}_{cu} \le -65$ و $g_1: -\bar{f}_{cu} \le -70$ می‌باشد.

طرح بهینه برای مقاومت فشاری $f_{cu} = 60\ MPa$، $f_{cu} = 65\ MPa$ و $f_{cu} = 70\ MPa$، برای محدوده‌های آب مصرفی در نتایج آزمایشگاهی [11]، انجام گردید. طراحی بهین برای هر سه مساله براساس روش تحلیلی پیشنهادی، می‌بایست کلیه قیود را، قیود g_1 تا g_{14}، ارضاع نماید بطوریکه تابع هدف نیز کمترین مقدار را داشته باشد. با توجه به اینکه نتایج بهینه‌سازی با روش پیشنهادی با نتایج آزمایشگاهی مرجع [11] مقایسه می‌گردند، از این رو محدوده آب مصرفی مطابق نسبتهای آب بدست آمده در مرجع مذکور در نظر گرفته شده است. نتایج بهینه براساس روش پیشنهادی با مقاومت‌های مشابه در نتایج آزمایشگاهی، جدول (۳)، مقایسه گردیدند. مقادیر مقاومت فشاری ٦۰، ٦٥ و ۷۰ مگاپاسکال مربوط به روش پیشنهادی و مقادیر ٦٢/١، ٦٤/٩ و ۷۰/۲ به ترتیب نزدیکترین طرح‌های بهینه آزمایشگاهی، از نظر مقاومت فشاری، به مقاومت‌های مورد انتظار در مثال‌های روش پیشنهادی می‌باشند.

باتوجه به جدول (۳)، از مقایسه نتایج طرح اختلاط بهینه بتن خودتراکم در شرایط آزمایشگاهی مرجع [11] با روش پیشنهادی با استناد به محدودیتهای روش مرجع مشاهده می‌گردد که در تمامی حالات مقاومت فشاری مورد انتظار، هزینه تولید یک مترمکعب بتن براساس روش پیشنهادی کمتر می‌باشد.

هرچند مقادیر آب مصرفی در نتایج آزمایشگاهی مرجع در محدوده ١٦٠ تا ١٧٠ کیلوگرم در نظر گرفته شده است و مقدار بهینه آب نیز باتوجه به شرایط طرح‌های اختلاط آزمایشگاهی مرجع [11] و رابطه مقاومت فشاری، رابطه (١٨)، ١٦٠ کیلوگرم در مترمکعب بدست آمده، ولیکن باتوجه به اینکه در برخی مراجع [23] حد پائین آب مورد نیاز در بتن خودتراکم ١٥٠ کیلوگرم در مترمکعب معرفی شده است، از این رو با انتخاب مقدار بهینه آب برابر ١٥٠ کیلوگرم در مترمکعب، بهینه‌سازی را مجددا انجام می‌دهیم. پس از حل مساله، مطابق جداول (٣) و (٤)، نتایج بهینه‌سازی نشان می‌دهد که در حداقل مقدار ممکن آب مصرفی، $x_{1_{opt}} = 150\ {}^{kg}/_{m^3}$، ضمن برآورده شدن کلیه قیود طراحی، کمترین مقدار تابع هدف نیز حاصل می‌گردد.

طرح اختلاط بهینه بتن خودتراکم با مقاومت بالای حاوی پودر خاکستر بادی برای مقاومت‌های مورد انتظار ٦٠، ٦٥ و ٧٠ مگاپاسکال محاسبه و در جدول (٤) نمایش داده شده است. در این حالت، قید حد پائین حجم خمیر، g_{13}، که یکی از قیود اصلی در تامین خواص بتن تازه و سخت شده در بتن خودتراکم می‌باشد، در مقادیر بسیار نزدیک به حد پائین (کمی بیشتر) ارضاء می‌گردد. به عبارتی قید حد پائین حجم خمیر نیز

تقریبا به صورت فعال ارضاء می‌گردد.

$$g_{13}\ :\ -\frac{1}{1000}\left(150+\frac{350.87}{3.12}+\frac{88.6}{2.36}+\frac{8}{1.07}+0.06\right)$$
$$+0.3=-0.0075\ \leq 0$$

در شکل شماره (۲) طرح بهین بدست آمده از روش پیشنهادی برای مقاومتهای مشخصه ۶۰، ۶۵ و ۷۰ مگاپاسکال در دو حالت محدوده آب مصرفی مطابق مرجع [11] و حد پائین آب مصرفی مطابق ادبیات تحقیق [23]، با نتایج آزمایشگاهی [11] مقایسه گردیده است. نتایج نشان داد که استفاده از روش تحلیلی پیشنهادی ضمن بدست آوردن کمترین مقدار تابع هدف، منجر به ارائه نسبتهای بهینه مصالح مصرفی بتن خودتراکم با مقاومت بالا می‌گردد.

به منظور اطمینان از درستی نتایج بدست‌آمده، تحلیل پس بهینگی نیز انجام گرفت. در تحلیل پس بهینگی که پس از بدست آوردن طرح بهین انجام می‌گردد مقادیر متغیرهای طراحی به مقدار جزئی کاهش و افزایش داده می شوند. سپس در هر دو حالت، کاهش و افزایش، مقدار تابع هدف تعیین و قیود نیز کنترل می‌گردند. اگر برخی قیود نقض و یا مقدار تابع هدف افزایش یابد بیانگر این است که طرح بهین بدست آمده بهترین طرح ممکن می باشد. در این تحقیق پس از انجام تحلیل پس بهینگی مشخص گردید در صورت کاهش جزئی در نسبتهای بهینه، مقادیر جدول (۴)، قید حد پائین حجم خمیر برقرار نمی‌باشد.

$$g_{13}\ :\ -\frac{1}{1000}\left(145+\frac{340}{3.12}+\frac{86}{2.36}+\frac{7.76}{1.07}+0.058\right)$$
$$+0.3=0.0023\ >0$$

همچنین با افزایش جزئی در نسبتهای بهینه، مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد. در نتیجه در هر دو حالت، مساله غیر بهینه می‌گردد. بنابراین نسبت‌های بدست‌آمده برای مقاومت‌های هدف، جدول (۴)، طرح اختلاط بهینه می‌باشند.

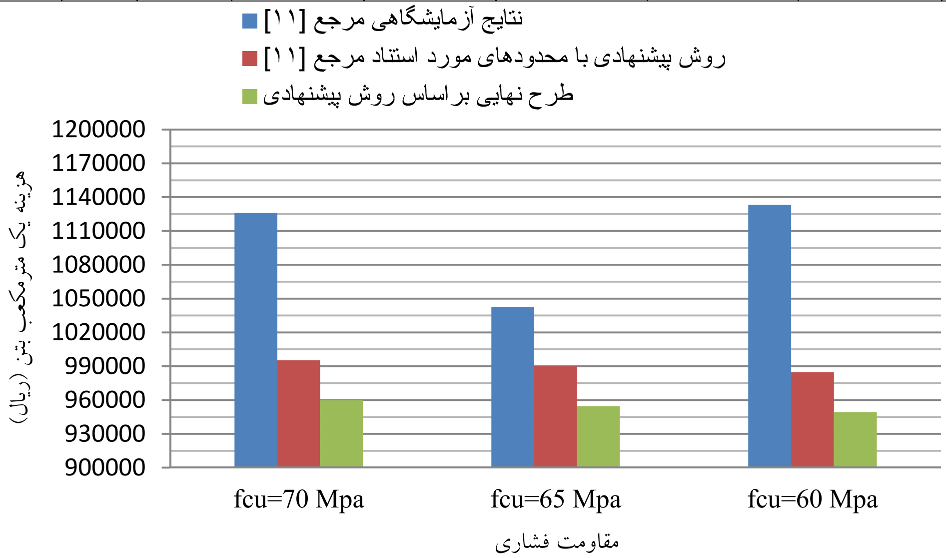
نتیجه بهینه‌سازی مشخص نمود که با استفاده از روش تحلیلی پیشنهادی می‌توان نسبتهای بهینه‌ای برای طرح اختلاط بتن‌های خودتراکم با مقاومت‌های بالای حاوی خاکستر بادی ارائه نمود به نحوی که با حداقل مقادیر آب و مواد سیمانی تولید گردیده و هزینه تولید نیز کمترین مقدار را داشته باشد. مقایسه هزینه‌های ساخت بتن، شکل (۲)، مشخص نمود که هزینه ساخت در طرح بهینه نهایی با روش پیشنهادی، نسبت به طرح بهینه روش پیشنهادی براساس شرایط داده‌های آزمایشگاهی ۳/۶ درصد کاهش و بطور میانگین نسبت به طرح اختلاط بهینه آزمایشگاهی [11] نیز ۱۳/۱۴ درصد کاهش می‌یابد.

جدول ۳ نتایج بهینه‌سازی براساس محدوده آب مصرفی در نتایج آزمایشگاهی مرجع [11]

هزینه (ریال)	عامل حباب‌ساز kg/m^3	فوق روان کننده kg/m^3	سنگ‌دانه درشت kg/m^3	سنگ‌دانه ریز kg/m^3	خاکستر بادی kg/m^3	سیمان kg/m^3	آب kg/m^3	مقاومت فشاری MPa
۹۸۴۷۱۶	۰/۰۶	۸	۹۵۵/۵۷	۶۳۱/۸۹	۹۴/۵۱	۳۷۴/۲۶	۱۶۰	۶۰
۱۱۳۳۲۵۶	۰/۰۶	۱۰	۸۸۲/۷۹	۸۱۵	۶۷/۱۵	۴۴۸	۱۷۰	۶۲/۱
۹۹۰۰۱۴	۰/۰۶	۸	۱۰۱۲/۱۲	۶۶۹/۲۸	۹۴/۵۱	۳۷۴/۲۶	۱۶۰	۶۵
۱۰۴۲۵۳۱	۰/۰۶	۱۰	۱۱۰۷/۷۵	۷۰۸/۲۴	۱۳۸/۴	۳۰۷/۵۵	۱۶۵	۶۴/۹
۹۹۵۱۹۹	۰/۰۶	۸	۱۰۶۷/۴۷	۷۰۵/۸۸	۹۴/۵۱	۳۷۴/۲۶	۱۶۰	۷۰
۱۱۲۵۹۹۹	۰/۰۸	۱۰	۱۰۳۶/۲۵	۶۶۲/۵۲	۱۱۸/۸۸	۳۹۶/۲۷	۱۷۰	۷۰/۲

جدول ٤ نتایج نهایی طرح اختلاط بهینه بتن برای مقاومتهای فشاری ٦۰، ٦٥ و۷۰ مگاپاسکال

هزینه (ریال)	عامل حباب‌ساز kg/m^3	فوق روان کننده kg/m^3	سنگ‌دانه درشت kg/m^3	سنگ‌دانه ریز kg/m^3	خاکستر بادی kg/m^3	سیمان kg/m^3	آب kg/m^3	مقاومت فشاری MPa
۹٤۹۲۷٦	۰/۰٦	۸	۹٥۹/۸۳	٦۳٤/۷۱	۸۸/٦	۳٥۰/۸۷	۱٥۰	٦۰
۹٥٤٥۹۹	۰/۰٦	۸	۱۰۱٦/٦٤	٦۷۲/۲۷	۸۸/٦	۳٥۰/۸۷	۱٥۰	٦٥
۹٥۹۸۰٥	۰/۰٦	۸	۱۰۷۲/۲۳	۷۰۹	۸۸/٦	۳٥۰/۸۷	۱٥۰	۷۰



شکل ۲ مقایسه نتایج طرح بهینه بتن خودتراکم

نتیجه گیری

در این تحقیق به منظور طراحی بهین نسبتهای اختلاط مصالح بتن یک روش تحلیلی جدید با معرفی رابطه خاصی بین مقاومت فشاری و نسبت‌های اختلاط، متغیرهای طراحی، براساس مفاهیم ریاضی بهینه‌سازی شامل تابع لاگرانزین و شرایط کان-تاکر و با استفاده از نتایج آزمایشگاهی معتبر پیشنهاد گردید. ویژگی مهم روش پیشنهادی، رابطه قید مقاومت فشاری می‌باشد که بصورت یک تابع نمایی نسبت به متغیرهای طراحی معرفی گردیده است. تعریف رابطه مقاومت فشاری بصورت نمایی سبب می‌گردد پس از تشکیل تابع لاگرانژین، در بررسی شرایط کان – تاکر، مساله بهینه-سازی بطور کامل بصورت تحلیلی و براساس روابط ریاضی قابل حل باشد و نیازی به استفاده از روشهای رایانه‌ای نباشد. ویژگی دیگر روش پیشنهادی این است که تنها مختص بتن خودتراکم نمی‌باشد، بلکه برای انواع بتن کاربرد دارد و به عبارتی یک روش عمومی و قابل تعمیم می‌باشد. در این تحقیق، مولفین به منظور معرفی روش، آن را برای بتن خودتراکم با مقاومت بالای حاوی خاکستر بادی استفاده نمودند. در فرآیند بهینه-سازی بتن خودتراکم به روش پیشنهادی، مهمترین قیود طراحی، قید مقاومت فشاری و همچنین قید نسبت حجمی آب به مواد سیمانی بودند. همچنین در طرح بهینه نسبتهای مصالح مصرفی بتن خودتراکم با مقاومت بالای حاوی خاکستر بادی، نسبت‌های بهینه آب و سیمان، حداقل‌های ممکن مورد نیاز در بتن‌های خودتراکم بدست آمدند. در تعیین رابطه مقاومت فشاری نیز به منظور دستیابی به نتایج مطلوب و دقیق می‌بایست از پراکندگی در نتایج آزمایشگاهی مرجع اجتناب نمود و از یک محدوده مقاومتی مناسب استفاده نمود. مقایسه هزینه‌های ساخت بتن مشخص نمود که هزینه ساخت در طرح بهینه نهایی با روش پیشنهادی،

نسبت به طرح بهینه روش پیشنهادی براساس شرایط داده‌های آزمایشگاهی، ۳/۶ درصد کاهش و بطور میانگین نسبت به طرح اختلاط بهینه آزمایشگاهی مرجع نیز ۱۳/۱۴ درصد کاهش می‌یابد.

مراجع

1. Okamura, H. and Ozawa, K., "Mix Design for Self-Compacting Concrete", *Concrete Library of JSCE* No. 25, pp. 107–120, (1995).
2. Su, N, Hsu, K. and Chai, H. W., "A Simple Mix Design Method for Self-compacting Concrete", *Cement and Concrete research,* Vol. 31, No. 12, pp. 1799–1807, (2001).
3. Ghezal, A. and Khayat, K. H., "Optimizing Self-consolidating Concrete with Limestone Filler by using Statistical Factorial Design Methods", *Materials Journal*, Vol. 99, No. 3, pp. 264–272, (2002).
4. Okamura, H. and Ouchi, M., "Self-compacting Concrete", *Journal of Advanced Concrete Technology*, Vol. 1, No. 1, pp. 5–15, (2003).
5. EN., "The European Guidelines for Self-compacting Concrete Specification, Production and Use", European Federation for Specialist Construction Chemicals and Concrete Systems, (2005).
6. Demone, P.L., "Self-compacting Concrete: An Analysis of 11 years of Case Studies", *Cement and Concrete Composites*, Vol. 28, No. 2, pp. 197–208, (2006).
7. ACI Committee-237., "Self-consolidating Concrete", American Concrete Institute, (2007).
8. ICAR Institute., "Aggregate in Self-consolidating Concrete", Research Report, 108-2f, March, (2007).
9. Bhattacharya, A., Ray, I. and Davalos, J. F., "Effects of Aggregate Grading and Admixture/Filler on Self-consolidating Concrete", *Open Construction and Building Technology Journal*, Vol. 2, pp. 89–95, (2008).
10. Aggarwal, P., Siddique, R., Aggarwal , Y. and Gupta, S. M., "Self-compacting Concrete-procedure for Mix Design", *Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies*, Vol. 7, No. 12, pp. 15–24, (2008).
11. Ozbay, E., Oztas, A., Baykasoglu, A. and Ozbebek, H., "Investigating Mix Proportions of High Strength Self Compacting Concrete by using Taguchi Method", Construction and Building Materials, Vol. 23, pp. 694–702, (2009).
12. Murali, T. M. and Kandasamy, S., "Mix Proportioning of High Performance Self-Compacting Concrete using Response Surface Methodology", *The Open Civil Engineering Journal*, Vol. 3, pp. 93–97, (2009).
13. Shen, J., Yurtdas, I. and Diagana, M., "Contribution to Mix Design Method of Self-compacting

Concrete (SCCS): Case of Pre-cast Industry", in Proceeding, *SCC 2010 Conference,* pp. 76–85, (2010).

14. Kheder, G. F. and Al Jadiri, R. S., "New Method for Proportioning Self-Consolidating Concrete Based on Compressive Strength Requirements", *ACI Materials Journal*, Vol. 107, No. 5, pp. 490–497, (2010).
15. Türkel, S. and Kandemir, A., "Fresh and Hardened Properties of SCC Made with Different Aggregate and Mineral Admixtures", *Journal of Materials in Civil Engineering*, Vol. 22, No. 10, pp. 1025–1032, (2010).
16. Uysal, M. and Sumer, M., "Performance of Self-compacting Concrete Containing Different Mineral Admixtures", *Construction and Building Materials*, Vol. 25, No. 11, pp. 4112–4120, (2011).
17. Uysal, M. and Yilmaz, K., "Effect of Mineral Admixtures on Properties of Self-compacting Concrete", *Cement and Concrete Composites*, Vol. 33, No. 7, pp. 771–776, (2011).
18 Bakhtiyari, S., Allahverdi, A., Rais-Ghasemi, M., Ramezanianpour, A. A., Parhizkar, T. and Zarrabi, B. A., "Mix Design, Compressive Strength and Resistance to Elevated Temperature (500 C) of Self-compacting Concretes Containing Limestone and Quartz fillers", *International Journal of Civil Engineering,* Vol. 9, No. 3, pp. 215–222, (2011).
19. Al Sarraf, S. Z., Hamoodi, M. J. and Ihsan, M. A., "High Strength Self-compacted Concrete Mix Design", *International Journal of Civil Engineering*, Vol. 2, No. 4, pp. 83–92, (2013).
20. Dubey, R. and Kumar, P., "An Empirical Approach to Design Optimized Self-Compacting Concrete Mixes", *Advances in Civil Engineering Materials*, Vol. 3, No. 2, pp. 76–103, (2014).
21. Shi, C., Wu, Z., Lv, K. X. and Wu, L., "A Review on Mixture Design Methods for Self-compacting Concrete", *Construction and Building Materials*, Vol. 84, pp. 387–398, (2015).

۲۲. "مبحث نهم مقررات ملی ساختمان، طرح و اجرای ساختمانهای بتن آرمه." وزارت راه و شهرسازی، دفتر مقررات ملی ساختمان، ویرایش چهارم، (۱۳۹۲).

23. EFNARC., "Specification Guidelines for Self-compacting Concrete", European Federation of Producers and Contractors of Specialist Products for Structures, (2001).
24. Okamura, H., Ozawa, K. and Ouchi, M., "Self-compacting Concrete", *Structural Concrete Journal*, Vol. 1, No. 1, pp. 3–17, (2000).
25. Arora, J. S., "Introduction to Optimum Design", New York: McGraw-Hill, (1989).